

Scott のモデル

Ziphil Aleshlas

2017 年 3 月 3 日

目次

1.	初めに	2
2.	構文的モデル	2
3.	Scott のモデル	3
3.1.	完備半順序集合	3
3.2.	モデルの構成	7
3.3.	適用写像の構成	11
3.4.	変項の結合の解釈	12
3.5.	モデル性	15
3.6.	連続写像全体との同型性	19
A.	補足	20
A.1.	Scott 位相	20
A.2.	解釈写像の別の定義	21

1. 初めに

ここでは、型なしラムダ計算のモデルを扱う。ラムダ計算のモデルがどのような概念であるかを定義した後、具体例として Scott により提案されたモデルについて触れる^{*1}。

集合論的写像 $\varphi: A \rightarrow B$ を、しばしばラムダ項のように

$$\varphi = \underline{\lambda} a \in A. \varphi(a)$$

と表す。なお、あくまでこれは集合論的な写像の表記の 1 つにすぎないので、ラムダ項とは明確に区別すること。

x, y, z, \dots はラムダ項の変項を表し、 a, b, c, \dots はそこで扱っている何らかの集合の元を表す。また、 M, N, P, Q, \dots はラムダ項を表す。ラムダ項の変項全体は Var で表し、ラムダ項全体は Λ で表す。 \mathbb{N} は自然数全体の集合を表す。

2. 構文的モデル

定義 1. 集合 A と A 上の演算 $*$: $A \times A \rightarrow A$ に対し、その対 $(A, *)$ を適用構造 (applicative structure) という。また、 $*$ を適用写像 (application mapping) という。

以下では、適用写像は常に $*$ を用い、適用構造を対 $(A, *)$ で表記する代わりに A だけで適用構造を表すことがある。

定義 2. 適用構造 A と元 $a, b \in A$ に対し、

$$\forall d \in A \quad a * d = b * d$$

が成り立つとき、 a と b は外延的同値 (extensionally equivalent) であるといい、 $a \sim b$ で表す。

定義 3. 適用構造 A が

$$\forall a, b \in A \quad a \sim b \implies a = b$$

を満たすとき、 A は外延的 (extensional) であるという。

定義 4. 適用構造 A に対し、写像 $\rho: \text{Var} \rightarrow A$ を A 上の評価写像 (valuation) という。 A 上の評価写像全体は $\text{Val}(A)$ で表す。

^{*1} 最初に Scott によって提案されたモデルは完備束を用いたものだったが、ここではそれより弱い概念である完備半順序集合を用いるよう修正したものを紹介する。

定義 5. 適用構造 A に対し, 写像 $\llbracket \cdot \rrbracket: \Lambda \times \text{Val}(A) \rightarrow A$ が 5 条件

- $\llbracket x \rrbracket^\rho = \rho(x)$
- $\llbracket PQ \rrbracket^\rho = \llbracket P \rrbracket^\rho * \llbracket Q \rrbracket^\rho$
- $\llbracket \lambda x. P \rrbracket^\rho * d = \llbracket P \rrbracket^{\rho[x:=d]}$
- $y \notin \text{FV}(P) \implies \llbracket \lambda x. P \rrbracket^\rho = \llbracket \lambda y. P[x := y] \rrbracket^\rho$
- $\rho \upharpoonright \text{FV}(M) = \sigma \upharpoonright \text{FV}(M) \implies \llbracket M \rrbracket^\rho = \llbracket M \rrbracket^\sigma$

を全て満たすとき, $\llbracket \cdot \rrbracket$ を A 上の解釈写像 (interpretation) という*². ここで, $\llbracket \cdot \rrbracket$ による (M, ρ) の像は $\llbracket M \rrbracket^\rho$ で表す.

定義 6. 適用構造 $(A, *)$ と A 上の解釈写像 $\llbracket \cdot \rrbracket$ の組 $(A, *, \llbracket \cdot \rrbracket)$ を構文的適用構造 (syntactical applicative structure) という.

以下では, 解釈写像は常に $\llbracket \cdot \rrbracket$ を用い, 構文的適用構造を組 $(A, *, \llbracket \cdot \rrbracket)$ で表記する代わりに A だけで適用構造を表す.

定義 7. 構文的適用構造 A とラムダ項 M, N に対し,

$$\forall \rho \in \text{Val}(A) \llbracket M \rrbracket^\rho = \llbracket N \rrbracket^\rho$$

が成り立つとき, A は $M = N$ を充足する (satisfy) といい, $A \vDash M = N$ で表す.

定義 8. 構文的適用構造 A について, 任意のラムダ項 M, N に対し,

$$\lambda\beta\eta \vdash M = N \implies A \vDash M = N$$

が成り立つとき, A を $\lambda\beta\eta$ -構文的モデル (syntactical model) という*³.

なお, 構文的適用構造の定義には様々な流儀があることに注意すること. 例えば, 解釈写像の条件に上で挙げた 4 つの条件以外のものを加え, 自動的に構文的モデルの条件を満たすようにしておく場合もある. ここでは, Barendregt^[2] の定義に従った.

3. Scott のモデル

3.1. 完備半順序集合

定義 9. 半順序集合 $D = (D, \sqsubseteq)$ およびその部分集合 $X \subseteq D$ について, 2 条件

- $X \neq \emptyset$ である

*² $\rho[x := d]$ は, ρ の x の像のみを d に変えた写像を表す. また, $\rho \upharpoonright \text{FV}(M)$ は, 写像 ρ の $\text{FV}(M)$ への制限を表す.

*³ $\lambda\beta\eta \vdash M = N$ は, $\beta\eta$ -簡約から誘導される同値関係によって $M = N$ が成り立つことを表す.

• 任意の $a, b \in X$ に対してある $c \in X$ が存在し, $a \sqsubseteq c$ かつ $b \sqsubseteq c$ が成り立つ
 がともに成り立つとき, X を D の有向集合 (directed set) という.

定義 10. 半順序集合 $D = (D, \sqsubseteq)$ について, 2 条件

- D に最小元 \perp が存在する
- 任意の有向集合 $X \subseteq D$ に対し, その上限 $\sqcup X$ が存在する

がともに成り立つとき, D は完備 (complete) であるという.

以降, 半順序集合の順序は常に \sqsubseteq で表し, いちいち明記しない. また, 上記の定義で表記した通り, 半順序集合 D に対して, その最小元は常に \perp で表し, 部分集合 $X \subseteq D$ の上限は $\sqcup X$ で表す. さらに, n に依存する条件 $P(n)$ と元 $a(n)$ に対して,

$$\bigsqcup_{P(n)} a(n) = \sqcup \{a(n) \mid P(n) \text{ が成り立つ}\}$$

と表す. また, 上限をとる集合が有限の場合は,

$$a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n = \sqcup \{a_1, \cdots, a_n\}$$

と表す.

定義 11. 完備半順序集合 D, D' および写像 $f: D \rightarrow D'$ をとる. 任意の $a, b \in D$ に対し, $a \sqsubseteq b$ ならば $f(a) \sqsubseteq f(b)$ が成り立つとき, f は単調 (monotonic) であるという.

定義 12. 完備半順序集合 D, D' および写像 $f: D \rightarrow D'$ をとる. 任意の有向集合 $X \subseteq D$ に対し, $\sqcup f(X)$ が存在して $f(\sqcup X) = \sqcup f(X)$ が成り立つとき, f は連続 (continuous) であるという.

完備半順序集合の写像 $f: D \rightarrow D'$ が連続であっても $f(\perp) = \perp$ とは限らないことに注意.

命題 1. 完備半順序集合 D, D' および写像 $f: D \rightarrow D'$ をとる. このとき, f が連続ならば f は単調である.

$a, b \in D$ が $a \sqsubseteq b$ を満たすとする. このとき $b = a \sqcup b$ であるから, 連続性から $f(b) = f(a) \sqcup f(b)$ が成り立ち, これより $f(a) \sqsubseteq f(b)$ が分かる. したがって, f は単調である.

命題 2. 完備半順序集合 D, D' および写像 $f: D \rightarrow D'$ をとり, さらに部分集合 $X \subseteq D$ をとる. このとき, f が単調で X が有向集合ならば, $f(X)$ も有向集合である.

$f(X) \neq \emptyset$ は明らかである. $a', b' \in f(X)$ をとり, $a' \sqsubseteq b'$ が成り立つとする. このとき, ある $a, b \in X$ が存在して, $a' = f(a), b' = f(b)$ と表せる. X は単調だから, ある $c \in X$ が存在して, $a \sqsubseteq c$ かつ $b \sqsubseteq c$ が成り立つ. f は単調なので, $f(a) \sqsubseteq f(c)$ かつ $f(b) \sqsubseteq f(c)$ も成り立ち, $f(c) \in f(X)$ だから, $f(X)$ も有向集合である.

定義 13. 完備半順序集合 D, D' に対し,

$$[D \rightarrow D'] = \{f: D \rightarrow D' \mid f \text{ は連続} \}$$

と定義する. また, $[D \rightarrow D']$ 上の半順序 \sqsubseteq を,

$$f \sqsubseteq g \iff \forall a \in D \ f(a) \sqsubseteq g(a)$$

で定める.

命題 3. 完備半順序集合 D, D' に対し, 上記の定義による半順序集合 $([D \rightarrow D'], \sqsubseteq)$ は完備である. 特に, その最小元は,

$$\perp = \underline{\lambda}d \in D. \perp$$

で与えられ, 有向集合 $Y \subseteq [D \rightarrow D']$ の上限は,

$$\sqcup Y = \underline{\lambda}d \in D. \bigsqcup_{f \in Y} f(d)$$

で与えられる.

上記の \perp が実際に最小元を与えていることは明らかである.

有向集合 $Y \subseteq [D \rightarrow D']$ をとり,

$$Y_d = \{f(d) \mid f \in Y\}$$

とおくと, これは D' の有向集合である. したがって $\sqcup Y_d$ は存在するので, $g = \underline{\lambda}d \in D. \sqcup Y_d$ とおく. g が Y の上限であることを示せば良い.

任意に有向集合 $X \subseteq D$ をとると,

$$g(\sqcup X) = \bigsqcup_{f \in Y} f(\sqcup X) = \bigsqcup_{f \in Y} \sqcup f(X) = \bigsqcup_{f \in Y} \bigsqcup_{a \in X} f(a) = \bigsqcup_{a \in X} \bigsqcup_{f \in Y} f(a) = \bigsqcup_{a \in X} g(a) = \sqcup g(X)$$

が成り立つから, g は連続であり, $g \in [D \rightarrow D']$ を得る. なお, 上式において, 上限をとっている集合は全て有向集合であることが簡単に示せるので, 上限の存在は保証されている.

任意に $h \in Y$ をとる. すると, g の定義から, 任意の $d \in D$ に対し $h(d) \sqsubseteq \sqcup Y_d = g(d)$ が成り立つ. これより $h \sqsubseteq g$ であるから, g は Y の上界である.

さらに Y の上界 h をとると, 任意の $f \in D$ と $d \in D$ に対して $f(d) \sqsubseteq h(d)$ が成り立つ. したがって, f を動かしてこの式の両辺の上界をとれば, $\sqcup Y_d \sqsubseteq h(d)$ を得る. この左辺は $g(d)$ だから, $g(d) \sqsubseteq h(d)$ となって $g \sqsubseteq h$ が成り立つ. 以上により, g は Y の上限である.

命題 4. 完備半順序集合 D, D', D'' および写像 $f: D \rightarrow D', f': D' \rightarrow D''$ をとる. このとき, f, f' がともに連続ならば, $f' \circ f$ も連続である.

f, f' の連続性より, 有向集合 $X \subseteq D$ に対し,

$$f'(f(\sqcup X)) = f'(\sqcup(X)) = \sqcup(f'(f(X)))$$

であることから明らかである.

定義 14. 完備半順序集合 D, D' をとる. 連続写像 $\varphi: D \rightarrow D', \psi: D' \rightarrow D$ が存在し,

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_D; \quad \varphi \circ \psi = \text{id}_{D'}$$

が成り立つとき, D は D' と同型 (isomorphic) であるといい, $D \cong D'$ で表す.

定義 15. 完備半順序集合 D, D' をとる. 連続写像 $\varphi: D \rightarrow D', \psi: D' \rightarrow D$ が存在し,

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_D; \quad \varphi \circ \psi \sqsubseteq \text{id}_{D'}$$

が成り立つとき, D を D' の射影 (projection) という. また, 対 (φ, ψ) を D' から D への射影 (projection) という.

D' から D への射影 (φ, ψ) があると, $\varphi(D)$ は D と同型である. したがって, 同型の違いを除いて $D \subseteq D'$ と見なせる.

命題 5. 完備半順序集合 D, D', D'' および写像 $\varphi: D \rightarrow D', \psi: D' \rightarrow D, \varphi': D' \rightarrow D'', \psi': D'' \rightarrow D'$ をとる. このとき, (φ, ψ) が D' から D への射影であり, (φ', ψ') が D'' から D' への射影ならば, $(\varphi' \circ \varphi, \psi \circ \psi')$ も D'' から D への射影である.

命題 4 より, $\varphi' \circ \varphi, \psi \circ \psi'$ はともに連続である. また,

$$\psi \circ \psi' \circ \varphi' \circ \varphi = \psi \circ \varphi = \text{id}_D$$

であり,

$$\varphi' \circ \varphi \circ \psi \circ \psi' \sqsubseteq \varphi' \circ \psi' \sqsubseteq \text{id}_{D''}$$

であるから, 射影となるための条件を全て満たしている.

定義 16. 完備半順序集合 D_n と連続写像 $\psi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ の列 $(D_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_n \in D_n, \psi_n(a_{n+1}) = a_n\} \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

と定める. また, $\lim D_n$ 上の半順序 \sqsubseteq を,

$$(a_0, a_1, \dots) \sqsubseteq (b_0, b_1, \dots) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \sqsubseteq b_n$$

で定める. 半順序集合 $(\lim D_n, \sqsubseteq)$ を列 (D_n, ψ_n) の逆極限 (inverse limit) という.

集合の直積の射影 $\pi_n: \prod D_n \rightarrow D_n$ をとる. 以下では, 元 $a \in \lim D_n$ に対して $\pi_n(a)$ のことを簡単に

a_n と書く。すなわち,

$$a = (a_0, a_1, \dots)$$

である。同様に, 部分集合 $X \subseteq D_n$ に対して $\pi_n(X)$ を X_n と書く。

命題 6. 完備半順序集合の列 (D_n, ψ_n) に対し, 上記の定義による半順序集合 $(\lim D_n, \sqsubseteq)$ は完備である。特に, その最小元は,

$$\perp = (\perp, \perp, \dots)$$

で与えられ, 有向集合 $Y \subseteq \lim D_n$ の上限は,

$$\sqcup Y = (\sqcup Y_0, \sqcup Y_1, \dots)$$

で与えられる。

上記の \perp が実際に最小元を与えていることは明らかである。

有向集合 $Y \subseteq \lim D_n$ に対し,

$$b = (\sqcup Y_0, \sqcup Y_1, \dots)$$

とおくと,

$$\psi_n(b_{n+1}) = \psi_n(\sqcup Y_{n+1}) = \sqcup \psi_n(Y_{n+1}) = \sqcup Y_n = b_n$$

が成り立つから, 実際に $b \in \lim D_n$ である。また, b が Y の上限であることは明らかである。

3.2. モデルの構成

以下では, 完備半順序集合 D を 1 つ固定する。

定義 17. 完備半順序集合 D_n ($n \in \mathbb{N}$) を, 以下によって再帰的に定義する。

$$\begin{aligned} D_0 &= D \\ D_{n+1} &= [D_n \rightarrow D_n] \end{aligned}$$

なお, 各 $[D_n \rightarrow D_n]$ の半順序は, 定義 13 に従って定める。

定義 18. 写像 $\varphi^n: D_n \rightarrow D_{n+1}$, $\psi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ ($n \in \mathbb{N}$) を, 以下によって再帰的に定義する。

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= \underline{\lambda}d \in D_0. \underline{\lambda}a \in D_0. d \\ \psi_0 &= \underline{\lambda}e \in D_1. e(\perp) \\ \varphi^{n+1} &= \underline{\lambda}d \in D_{n+1}. \varphi^n \circ d \circ \psi_n \\ \psi_{n+1} &= \underline{\lambda}e \in D_{n+2}. \psi_n \circ e \circ \varphi^n \end{aligned}$$

このとき, 対 (φ^n, ψ_n) を D_{n+1} から D_n への標準射影 (standard projection) という。

| 命題 7. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 標準射影 (φ^n, ψ_n) は, 定義 15 の意味で D_{n+1} から D_n への射影である.

証明は n に関する帰納法による.

まず, $n = 0$ とする. 初めに, 上記の $\varphi^0: D_0 \rightarrow D_1$ および $\psi_0: D_1 \rightarrow D_0$ の定義において, 像が実際に終域に含まれているかを確認する. 任意の $d \in D_0$ に対し, $\varphi^0(d) = \underline{\lambda}a \in D_0$. d は定値写像より明らかに連続なので, $\varphi^0(d) \in D_1$ である. また, 任意の $e \in D_1$ に対し, $\psi_0(e) = e(\perp)$ より $\psi_0 \in D_0$ だから, ψ_0 も定義される. したがって, φ^0, ψ_0 は矛盾なく定義される.

φ^0, ψ_0 が連続であることを示す. 任意に有向集合 $X \subseteq D_0$ をとると, 命題 3 を用いることで,

$$\begin{aligned} \sqcup \varphi^0(X) &= \bigsqcup_{d \in X} \varphi^0(d) \\ &= \bigsqcup_{d \in X} (\underline{\lambda}a \in D_0, d) \\ &= \underline{\lambda}a \in D_0, \bigsqcup_{d \in X} d \\ &= \underline{\lambda}a \in D_0, \sqcup X \\ &= \varphi^0(\sqcup X) \end{aligned}$$

が分かる. これより φ^0 は連続である. また, ψ_0 は定値写像だからこれも連続である.

$\psi_0 \circ \varphi^0 = \text{id}_{D_0}$ を示す. 任意の $d \in D_0$ に対して,

$$\psi_0(\varphi^0(d)) = \varphi^0(d)(\perp) = d$$

であるから, 示された.

$\varphi^0 \circ \psi_0 \sqsubseteq \text{id}_{D_1}$ を示す. 任意の $e \in D_1$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi^0(\psi_0(e)) &= \varphi^0(e(\perp)) \\ &= \underline{\lambda}a \in D_0, e(\perp) \\ &\sqsubseteq \underline{\lambda}a \in D_0, e(a) \\ &= e \end{aligned}$$

より, これも示された.

以上により, (φ^0, ψ_0) は D_1 から D_0 への射影である.

次に, $n \geq 1$ とする. 帰納法の仮定から φ^n, ψ_n はともに連続であり, 命題 4 より連続写像の合成も連続であるから, $\varphi^n: D_n \rightarrow D_{n+1}$, $\psi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ が矛盾なく定義されることは明らかである.

φ^n, ψ_n が連続であることを示す. 任意に有向集合 $X \subseteq D_n$ をとると, 命題 3 によって,

$$\begin{aligned} \varphi^n(\sqcup X) &= \underline{\lambda}a \in D_{n-1}, \varphi^{n-1}((\sqcup X)(\psi_{n-1}(a))) \\ &= \underline{\lambda}a \in D_{n-1}, \varphi^{n-1}\left(\bigsqcup_{d \in X} d(\psi_{n-1}(a))\right) \\ &= \underline{\lambda}a \in D_{n-1}, \bigsqcup_{d \in X} \varphi^{n-1}(d(\psi_{n-1}(a))) \\ &= \underline{\lambda}a \in D_{n-1}, \bigsqcup_{d \in X} \varphi^n(d)(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda a \in D_{n-1} \cdot (\sqcup \varphi^n(X))(a) \\
&= \sqcup \varphi^n(X)
\end{aligned}$$

を得るから、 φ^n は連続である。 ψ_n が連続であることも同様の計算で示される。

$\psi_n \circ \varphi^n = \text{id}_{D_n}$ を示す。帰納法の仮定から $\psi_{n-1} \circ \varphi^{n-1} = \text{id}_{D_{n-1}}$ であるから、任意の $d \in D_n$ に対し、

$$\begin{aligned}
\psi_n(\varphi^n(d)) &= \psi_n(\varphi^{n-1} \circ d \circ \psi_{n-1}) \\
&= \psi_{n-1} \circ \varphi^{n-1} \circ d \circ \psi_{n-1} \circ \varphi^{n-1} \\
&= d
\end{aligned}$$

を得る。したがって、示された。

$\varphi^n \circ \psi_n \sqsubseteq \text{id}_{D_{n+1}}$ を示す。帰納法の仮定から $\varphi^{n-1} \circ \psi_{n-1} \sqsubseteq \text{id}_{D_n}$ であるから、任意の $e \in D_{n+1}$ に対し、

$$\begin{aligned}
\varphi^n(\psi_n(e)) &= \varphi^n(\psi_{n-1} \circ e \circ \varphi^{n-1}) \\
&= \varphi^{n-1} \circ \psi_{n-1} \circ e \circ \varphi^{n-1} \circ \psi_{n-1} \\
&\sqsubseteq e
\end{aligned}$$

となり、これも示された。

補題 8. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $a \in D_{n+1}$, $b \in D_n$ について、

$$\psi_{n-1}(a(b)) \sqsupseteq \psi_n(a)(\psi_{n-1}(b))$$

が成り立つ。

命題 7 により $\varphi^{n-1} \circ \psi_{n-1} \sqsubseteq \text{id}_{D_n}$ が成り立つ。これを用いれば、 ψ_n の定義より、

$$\psi_n(a)(\psi_{n-1}(b)) = \psi_{n-1}(a(\varphi^{n-1}(\psi_{n-1}(b)))) \sqsubseteq \psi_{n-1}(a(b))$$

が分かる。

さて、ここまでで完備半順序集合の列

$$D_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi^0} \\ \xleftarrow{\psi_0} \end{array} D_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi^1} \\ \xleftarrow{\psi_1} \end{array} D_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} D_n \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi^n} \\ \xleftarrow{\psi_n} \end{array} D_{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \cdots$$

が構成できた。特に、 D_n と ψ_n について逆極限をとることができる。

定義 19. 完備半順序集合 D_∞ を、列 (D_n, ψ_n) の逆極限として、

$$D_\infty = \lim_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

と定義する。 D_∞ の半順序は、定義 16 に従って定める。

以下では、簡単のため $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とおく。

定義 20. 写像 $\Phi_n^m: D_m \rightarrow D_n$ ($m, n \in \hat{\mathbb{N}}$) を以下によって定める. $m < \infty, n < \infty$ であれば,

$$\Phi_n^m = \begin{cases} \varphi^{n-1} \circ \varphi^{n-2} \circ \cdots \circ \varphi^m & (m < n) \\ \text{id}_{D_m} & (m = n) \\ \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \circ \psi_{m-1} & (m > n) \end{cases}$$

とする. また, m, n の一方もしくは両方が ∞ の場合は,

$$\Phi_\infty^m = \underline{\lambda}d \in D_m. (\Phi_0^m(d), \Phi_1^m(d), \cdots)$$

$$\Phi_n^\infty = \underline{\lambda}e \in D_\infty. e_n$$

$$\Phi_\infty^\infty = \text{id}_{D_\infty}$$

と定める.

命題 9. 任意の $m, n, k \in \hat{\mathbb{N}}$ に対し,

$$\Phi_n^k \circ \Phi_n^m \begin{cases} = \Phi_n^m & (k \geq m \text{ OR } k \geq n) \\ \sqsubseteq \Phi_n^m & (k < m \text{ AND } k < n) \end{cases}$$

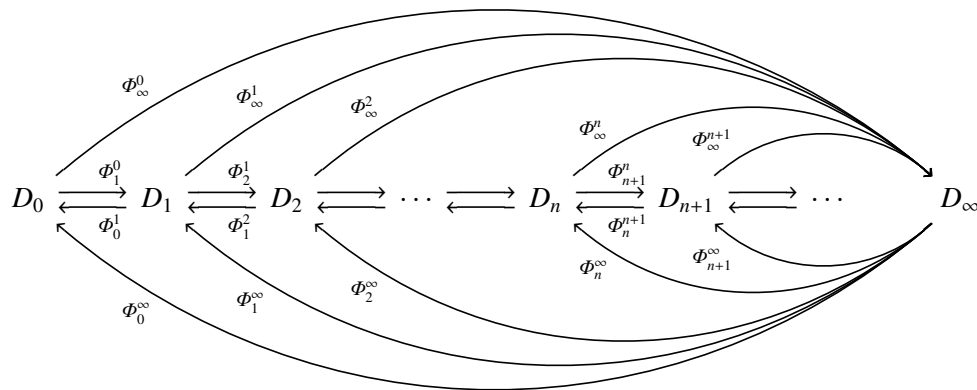
が成り立つ.

m, n, k の大小関係に応じて場合分けして, 各場合ごとに確認すれば良い.

命題 10. 各 $m, n \in \hat{\mathbb{N}}$ に対し, $m < n$ ならば (Φ_n^m, Φ_m^n) は D_n から D_m への射影である.

命題 9 から即座に従う.

この命題により, 完備半順序集合と連続写像の図式



が構成されたことになる. さらに, $m, n \in \hat{\mathbb{N}}$ に対して, $m < n$ ならば (Φ_n^m, Φ_m^n) は射影だから, 同型の違いを除いて $D_m \subseteq D_n$ と見なせる. 特に, $m \in \mathbb{N}$ に対して $D_m \subseteq D_\infty$ であるから, D_∞ は全ての D_m を含むような (さらにそのようなものの中で最も小さい) 完備半順序集合である.

3.3. 適用写像の構成

補題 11. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $a, b \in D_\infty$ に対し,

$$\Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n)) \sqsubseteq \Phi_\infty^{n+1}(a_{n+2}(b_{n+1}))$$

が成り立つ.

命題 9 により $\Phi_\infty^{n+1} \circ \varphi^n = \Phi_\infty^n$ が成り立つ. このことと補題 8 を用いれば,

$$\begin{aligned} \Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n)) &= \Phi_\infty^{n+1}(\varphi^n(a_{n+1}(b_n))) \\ &= \Phi_\infty^{n+1}(\varphi^n(\psi_{n+1}(a_{n+2})(\psi_n(b_{n+1})))) \\ &\sqsubseteq \Phi_\infty^{n+1}(a_{n+2}(b_{n+1})) \end{aligned}$$

となるので, 示された.

これにより, 各 $a, b \in D_\infty$ に対して,

$$\{\Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n)) \mid n \geq 0\}$$

が特に有向集合であることが分かる. したがって, 以下の定義が意味をもつ.

定義 21. D_∞ 上の適用写像 $*$ を, $a, b \in D_\infty$ に対して,

$$a * b = \bigsqcup_{n \geq 0} \Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n))$$

と定めることで定義する.

$a * b$ は D_∞ の元なので, $r \in \mathbb{N}$ に対して r -成分が定まるのだが, それは以下のように表示される.

補題 12. 任意の $r \in \mathbb{N}$ と $a, b \in D_\infty$ に対して,

$$(a * b)_r = \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+1}(b_n))$$

が成り立つ.

補題 11 より, $\Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n))$ は n に関して単調増加である. したがって, $a * b$ の定義において, 上限をとる集合から小さい n に対する項を除いても良く,

$$a * b = \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n))$$

が成り立つ. この両辺に Φ_r^∞ を施して命題 9 を用いれば,

$$(a * b)_r = \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^\infty(\Phi_\infty^n(a_{n+1}(b_n))) = \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+1}(b_n))$$

を得る.

| 定理 13. 適用構造 $(D_\infty, *)$ は外延的である.

$a, b \in D_\infty$ が $a \sim b$ を満たしているとする. 任意に $r \in \mathbb{N}$ および $c \in D_r$ をとる. $d = \Phi_\infty^r(c)$ とおくと, 補題 12 より,

$$\begin{aligned}
(a * d)_r &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+1}(d_n)) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+1}(\Phi_n^r(c))) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} (\psi_r \circ \cdots \circ \psi_{n-1} \circ a_{n+1} \circ \varphi^{n-1} \circ \cdots \circ \varphi^r)(c) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} (\psi_r \circ \cdots \circ \psi_{n-2} \circ \psi_n(a_{n+1}) \circ \varphi^{n-2} \circ \cdots \circ \varphi^r)(c) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} (\psi_r \circ \cdots \circ \psi_{n-2} \circ a_n \circ \varphi^{n-2} \circ \cdots \circ \varphi^r)(c) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} a_{r+1}(c) \\
&= a_{r+1}(c)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして,

$$(b * d)_r = b_{r+1}(c)$$

も成り立つ. $a \sim b$ であったから $a * d = b * d$ が成り立つので, 上式から $a_{r+1}(c) = b_{r+1}(c)$ を得る. これより, c は任意なので $a_{r+1} = b_{r+1}$ となり, r も任意なので $a = b$ を得る.

3.4. 変項の結合の解釈

| 定義 22. ラムダ項 M がラムダ抽象を含まないとき, M を変項の結合 (combination of variables) という.

定義 23. 変項の結合 M と評価写像 ρ に対して, $\{\{M\}\}^\rho \in D_\infty$ を以下によって再帰的に定義する.

$$\begin{aligned}
\{\{x\}\}^\rho &= \rho(x) \\
\{\{PQ\}\}^\rho &= \{\{P\}\}^\rho * \{\{Q\}\}^\rho
\end{aligned}$$

さらに $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\{\{M\}\}_n^\rho \in D_n$ を以下によって再帰的に定義する.

$$\begin{aligned}
\{\{x\}\}_n^\rho &= (\rho(x))_n \\
\{\{PQ\}\}_n^\rho &= \{\{P\}\}_{n+1}^\rho (\{\{Q\}\}_n^\rho)
\end{aligned}$$

補題 14. 変項の結合 M と評価写像 ρ をとる. 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し, $m \leq n$ ならば,

$$\Phi_m^n(\{\{M\}\}_n^\rho) \supseteq \{\{M\}\}_m^\rho$$

が成り立つ.

$n = m + 1$ の場合が示されれば，帰納的に一般の場合も示される．したがって， $n = m + 1$ の場合，すなわち

$$\psi_m(\{\{M\}_{m+1}^\rho\}) \supseteq \{\{M\}_m^\rho\}$$

を示す．証明は M に関する帰納法による．

$M \equiv x$ のとき． $a = \rho(x)$ とおけば，

$$\psi_m(\{\{x\}_{m+1}^\rho\}) = \psi_m(a_{m+1}) = a_m = \{\{x\}_m^\rho\}$$

であるから，示したい不等式は等号で成り立つ．

$M \equiv PQ$ のときは，補題 8 と帰納法の仮定を用いれば，

$$\begin{aligned} \psi_m(\{\{PQ\}_{m+1}^\rho\}) &= \psi_m(\{\{P\}_{m+2}^\rho(\{\{Q\}_{m+1}^\rho\})\}) \\ &\supseteq \psi_{m+1}(\{\{P\}_{m+2}^\rho\})(\psi_m(\{\{Q\}_{m+1}^\rho\})) \\ &\supseteq \{\{P\}_{m+1}^\rho\}(\{\{Q\}_m^\rho\}) \end{aligned}$$

となるから，示された．

補題 15. 変項の結合 M と評価写像 ρ をとる．任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し， $m \leq n$ ならば，

$$\Phi_\infty^n(\{\{M\}_n^\rho\}) \supseteq \Phi_\infty^m(\{\{M\}_m^\rho\})$$

が成り立つ．

$n = m + 1$ の場合を示せば十分である．この場合は，補題 14 と命題 9 を用いて，

$$\begin{aligned} \Phi_\infty^{m+1}(\{\{M\}_{m+1}^\rho\}) &\subseteq \Phi_\infty^{m+1}(\varphi^m(\psi_m(\{\{M\}_{m+1}^\rho\}))) \\ &\subseteq \Phi_\infty^{m+1}(\varphi^m(\{\{M\}_m^\rho\})) \\ &= \Phi_\infty^m(\{\{M\}_m^\rho\}) \end{aligned}$$

となり，示される．

補題 16. 変項の結合 M と評価写像 ρ をとる．任意の $r \in \mathbb{N}$ に対し，

$$(\{\{M\}^\rho\})_r = \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\{\{M\}_n^\rho\})$$

が成り立つ．

M に関する帰納法による．

$M \equiv x$ のとき． $a = \rho(x)$ とおけば，命題 9 によって $n \geq r$ ならば $\Phi_r^n(a_n) = a_r$ が成り立つから，

$$\bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\{\{x\}_n^\rho\}) = \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_n) = \bigsqcup_{n \geq r} a_r = a_r = (\{\{x\}^\rho\})_r$$

が成り立つ．したがって，補題の式が示された．

$M \equiv PQ$ のとき. まず, 補題 12, 14 および帰納法の仮定により,

$$\begin{aligned}
(\llbracket PQ \rrbracket^\rho)_r &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\llbracket P \rrbracket^\rho_{n+1}(\llbracket Q \rrbracket^\rho_n)) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n \left(\left(\bigsqcup_{p \geq n+1} \Phi_{n+1}^p(\llbracket P \rrbracket^\rho_p) \right) \left(\bigsqcup_{q \geq n} \Phi_n^q(\llbracket Q \rrbracket^\rho_q) \right) \right) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} \bigsqcup_{p \geq n+1} \bigsqcup_{q \geq n} \Phi_r^n(\Phi_{n+1}^p(\llbracket P \rrbracket^\rho_p)(\Phi_n^q(\llbracket Q \rrbracket^\rho_q))) \\
&\supseteq \bigsqcup_{n \geq r} \bigsqcup_{p \geq n+1} \bigsqcup_{q \geq n} \Phi_r^n(\llbracket P \rrbracket^\rho_{n+1}(\llbracket Q \rrbracket^\rho_n)) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} \bigsqcup_{p \geq n+1} \bigsqcup_{q \geq n} \Phi_r^n(\llbracket PQ \rrbracket^\rho_n) \\
&= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\llbracket PQ \rrbracket^\rho_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ. これにより, 示したい等式の片方の不等号が示された.

次に, 上の式の逆向きの不等号を示すため, $p \geq n+1, q \geq n$ として

$$a_{npq} = \Phi_r^n(\Phi_{n+1}^p(\llbracket P \rrbracket^\rho_p)(\Phi_n^q(\llbracket Q \rrbracket^\rho_q)))$$

を上から評価する. $m = \max(p-1, q)$ とおくと, $n+1 \leq p \leq m+1$ であるから, 補題 14 と命題 9 により,

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1}^p(\llbracket P \rrbracket^\rho_p) &\sqsubseteq \Phi_{n+1}^p(\Phi_p^{m+1}(\llbracket P \rrbracket^\rho_{m+1})) \\
&= \Phi_{n+1}^{m+1}(\llbracket P \rrbracket^\rho_{m+1}) \\
&= (\psi_{n+1} \circ \cdots \circ \psi_m)(\llbracket P \rrbracket^\rho_{m+1})
\end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして, $n \leq q \leq m$ より,

$$\Phi_n^q(\llbracket Q \rrbracket^\rho_q) \sqsubseteq (\psi_n \circ \cdots \circ \psi_{m-1})(\llbracket Q \rrbracket^\rho_m)$$

も成り立つ. この 2 つの式から, 補題 8 を繰り返し用いることで,

$$\begin{aligned}
a_{npq} &\sqsubseteq \Phi_r^n((\psi_{n+1} \circ \cdots \circ \psi_m)(\llbracket P \rrbracket^\rho_{m+1}))((\psi_n \circ \cdots \circ \psi_{m-1})(\llbracket Q \rrbracket^\rho_m)) \\
&\sqsubseteq \Phi_r^n((\psi_n \circ \cdots \circ \psi_{m-1})(\llbracket P \rrbracket^\rho_{m+1}(\llbracket Q \rrbracket^\rho_m))) \\
&= (\Phi_r^n \circ \psi_n \circ \cdots \circ \psi_{m-1})(\llbracket PQ \rrbracket^\rho_m) \\
&= \Phi_r^m(\llbracket PQ \rrbracket^\rho_m)
\end{aligned}$$

を得る. $m \leq r$ だから,

$$a_{npq} \sqsubseteq \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\llbracket PQ \rrbracket^\rho_n)$$

が成り立つ. n, p, q について両辺上限をとれば,

$$(\llbracket PQ \rrbracket^\rho)_r = \bigsqcup_{n \geq r} \bigsqcup_{p \geq n+1} \bigsqcup_{q \geq n} a_{npq} \sqsubseteq \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\llbracket PQ \rrbracket^\rho_n)$$

が分かり, 逆向きの不等号も示された.

3.5. モデル性

定義 24. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbf{k}_n \in D_n$ を

$$\mathbf{k}_n = \begin{cases} \perp & (n = 0) \\ \text{id}_{D_0} & (n = 1) \\ \underline{\lambda}a \in D_{n-1}, \underline{\lambda}b \in D_{n-2}, \psi_{n-2}(a) & (n \geq 2) \end{cases}$$

によって定義する. また, $\mathbf{k} \in D_\infty$ を

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \dots)$$

によって定義する.

命題 17. 上記の \mathbf{k} は矛盾なく定義され, 任意の $a, b \in D_\infty$ に対し,

$$\mathbf{k} * a * b = a$$

を満たす.

矛盾なく定義されることは単純な計算によって確かめられるので, ここでは省略する.

評価写像 ρ を $\rho(k) = \mathbf{k}$, $\rho(x) = a$, $\rho(y) = b$ となるようにとる. このとき,

$$\{\{kxy\}\}^\rho = \mathbf{k} * a * b$$

である. したがって, 補題 16 を用いれば, 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} * a * b)_r &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\{\{kxy\}\}_n^\rho) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\mathbf{k}_{n+2}(a_{n+1})(b_n)) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\psi_n(a_{n+1})) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r} a_r \\ &= a_r \end{aligned}$$

を得る. 任意の成分が一致しているから, 命題の主張が示された.

定義 25. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbf{s}_n \in D_n$ を

$$\mathbf{s}_n = \begin{cases} \perp & (n = 0) \\ \text{id}_{D_0} & (n = 1) \\ \underline{\lambda}a \in D_1, \underline{\lambda}b \in D_0, a(\perp) & (n = 2) \\ \underline{\lambda}a \in D_{n-1}, \underline{\lambda}b \in D_{n-2}, \underline{\lambda}c \in D_{n-3}, a(\varphi^{n-3}(c))(b(c)) & (n \geq 3) \end{cases}$$

によって定義する. また, $\mathbf{s} \in D_\infty$ を

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots)$$

によって定義する.

命題 18. 上記の \mathbf{s} は矛盾なく定義され, 任意の $a, b, c \in D_\infty$ に対し,

$$\mathbf{s} * a * b * c = a * c * (b * c)$$

を満たす.

矛盾なく定義されることの証明は省略する.

評価写像 ρ を $\rho(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$, $\rho(x) = a$, $\rho(y) = b$, $\rho(z) = c$ となるようにとると,

$$\{\{sxyz\}\}^\rho = \mathbf{s} * a * b * c$$

である. したがって, 補題 16 を用いれば, 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} * a * b * c)_r &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\{\{sxyz\}\}_n^\rho) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(\mathbf{s}_{n+3}(a_{n+2})(b_{n+1})(c_n)) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+2}(\varphi^n(c_n))(b_{n+1}(c_n))) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+2}(\varphi^n(\psi_n(c_{n+1}))(b_{n+1}(c_n)))) \\ &\sqsubseteq \bigsqcup_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+2}(c_{n+1})(b_{n+1}(c_n))) \\ &= (a * c * (b * c))_r \end{aligned}$$

が成り立つ. 一方, 補題 15 より $\Phi_r^n(\{\{sxyz\}\}_n^\rho)$ ($n \geq r$) は n に関して単調増加だから, 上限をとる集合から $n = r$ の項を除いても良い. したがって,

$$(\mathbf{s} * a * b * c)_r = \bigsqcup_{n \geq r+1} \Phi_r^n(\{\{sxyz\}\}_n^\rho)$$

が成り立つ. よって, 補題 8 を複数回使うことで,

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} * a * b * c)_r &= \bigsqcup_{n \geq r+1} \Phi_r^n(a_{n+2}(\varphi^n(c_n))(b_{n+1}(c_n))) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r+1} \Phi_r^{n-1}(\psi_{n-1}(a_{n+2}(\varphi^n(c_n))(b_{n+1}(c_n)))) \\ &\sqsupseteq \bigsqcup_{n \geq r+1} \Phi_r^{n-1}(\psi_n(a_{n+2}(\varphi^n(c_n)))(\psi_{n-1}(b_{n+1}(c_n)))) \\ &\sqsupseteq \bigsqcup_{n \geq r+1} \Phi_r^{n-1}(\psi_{n+1}(a_{n+2})(\psi_n(\varphi^n(c_n)))(\psi_n(b_{n+1})(\psi_{n-1}(c_n)))) \\ &= \bigsqcup_{n \geq r+1} \Phi_r^{n-1}(a_{n+1}(c_n)(b_n(c_{n-1}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{n \geq r} \Phi_r^n(a_{n+2}(c_{n+1})(b_{n+1}(c_n))) \\
&= (a * c * (b * c))_r
\end{aligned}$$

を得る。任意の成分に対して両方向の不等号が示されたので、命題の等式が従う。

定理 19. ラムダ項 M に対し、変項と \mathbf{K} , \mathbf{S} の結合 M^* が存在して $M^* =_{\beta} M$ が成り立つ。なお、

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &\equiv \lambda xy. x \\
\mathbf{S} &\equiv \lambda xyz. xz(yz)
\end{aligned}$$

と定義する。

M^* を以下によって再帰的に定義すれば良い。

$$\begin{aligned}
x^* &\equiv x \\
(PQ)^* &\equiv P^*Q^* \\
(\lambda x. x)^* &\equiv \mathbf{SKK} \\
(\lambda x. P)^* &\equiv \mathbf{KP}^* && (x \notin \text{FV}(P)) \\
(\lambda x. PQ)^* &\equiv \mathbf{S}(\lambda x. P)^*(\lambda x. Q)^* && (x \in \text{FV}(PQ)) \\
(\lambda x. \lambda y. P)^* &\equiv (\lambda x. (\lambda y. P)^*)^* && (x \in \text{FV}(P))
\end{aligned}$$

この定義によって実際に $M^* =_{\beta} M$ が成立することは、 M に関する帰納法により容易に確かめられる。

定義 26. 変項と \mathbf{K} , \mathbf{S} の結合 M および評価写像 ρ に対して、 $\llbracket M \rrbracket^{\rho} \in D_{\infty}$ を以下によって再帰的に定義する。

$$\begin{aligned}
\llbracket x \rrbracket^{\rho} &= \rho(x) \\
\llbracket \mathbf{K} \rrbracket^{\rho} &= \mathbf{k} \\
\llbracket \mathbf{S} \rrbracket^{\rho} &= \mathbf{s} \\
\llbracket PQ \rrbracket^{\rho} &= \llbracket P \rrbracket^{\rho} * \llbracket Q \rrbracket^{\rho}
\end{aligned}$$

一般のラムダ項 M については、 $M^* = M$ を満たすような変項と \mathbf{K} , \mathbf{S} の結合 M^* をとり、

$$\llbracket M \rrbracket^{\rho} = \llbracket M^* \rrbracket^{\rho}$$

とする。

命題 20. 上記の定義は、 D_{∞} 上の解釈写像 $\llbracket \cdot \rrbracket$ を定める。

解釈写像の定義 5 より、1 番目と 2 番目の条件は定義から明らかである。3 番目の条件は、帰納法により容易に示せる。4 番目の条件は、ラムダ項 M に対して M^* が M の α -変換に関して不変であることから従う。また、5 番目の条件は、ラムダ項 M に対して $\text{FV}(M) = \text{FV}(M^*)$ であることから従う。

補題 21. 任意のラムダ項 M, N と評価写像 ρ に対し,

$$\llbracket (\lambda x. M)N \rrbracket^\rho = \llbracket M[x := N] \rrbracket^\rho$$

が成り立つ.

M に関する帰納法による.

$M \equiv x$ のときは,

$$\begin{aligned} \llbracket (\lambda x. x)N \rrbracket^\rho &= \llbracket \lambda x. x \rrbracket^\rho * \llbracket N \rrbracket^\rho \\ &= \mathbf{s} * \mathbf{k} * \mathbf{k} * \llbracket N \rrbracket^\rho \\ &= \llbracket N \rrbracket^\rho \\ &= \llbracket x[x := N] \rrbracket^\rho \end{aligned}$$

となり, 補題の等式が示された.

$M \equiv y$ ($y \neq x$) のときは,

$$\begin{aligned} \llbracket (\lambda x. y)N \rrbracket^\rho &= \llbracket \lambda x. y \rrbracket^\rho * \llbracket N \rrbracket^\rho \\ &= \mathbf{k} * \llbracket y \rrbracket^\rho * \llbracket N \rrbracket^\rho \\ &= \llbracket y \rrbracket^\rho \\ &= \llbracket y[x := N] \rrbracket^\rho \end{aligned}$$

となり, この場合も補題の等式が示された.

$M \equiv PQ$ のときは, 帰納法の仮定を用いれば明らかである.

$M \equiv \lambda y. P$ のとき. 初めに適当な α -変換を M に施して, $y \neq x$ および $y \notin \text{FV}(N)$ が成り立つようにしておく. このとき, 任意の $d \in D$ に対して, 帰納法の仮定を用いることで,

$$\begin{aligned} \llbracket (\lambda x. \lambda y. P)N \rrbracket^\rho * d &= \llbracket \lambda x. \lambda y. P \rrbracket^\rho * \llbracket N \rrbracket^\rho * d \\ &= \llbracket \lambda y. P \rrbracket^{\rho[x := \llbracket N \rrbracket^\rho]} * d \\ &= \llbracket P \rrbracket^{\rho[x := \llbracket N \rrbracket^\rho][y := d]} \\ &= \llbracket \lambda x. P \rrbracket^{\rho[y := d]} * \llbracket N \rrbracket^\rho \\ &= \llbracket \lambda x. P \rrbracket^{\rho[y := d]} * \llbracket N \rrbracket^{\rho[y := d]} \\ &= \llbracket (\lambda x. P)N \rrbracket^{\rho[y := d]} \\ &= \llbracket P[x := N] \rrbracket^{\rho[y := d]} \\ &= \llbracket \lambda y. P[x := N] \rrbracket * d \\ &= \llbracket (\lambda y. P)[x := N] \rrbracket * d \end{aligned}$$

と計算できる. d は任意であり, 定理 13 から D_∞ は外延的だから,

$$\llbracket (\lambda x. \lambda y. P)N \rrbracket^\rho = \llbracket (\lambda y. P)[x := N] \rrbracket$$

が成り立つことが分かる. これが示したかった等式である.

補題 22. 任意のラムダ項 M と評価写像 ρ に対し, $x \notin \text{FV}(M)$ ならば,

$$\llbracket \lambda x. Mx \rrbracket^\rho = \llbracket M \rrbracket^\rho$$

が成り立つ.

任意に $d \in D$ をとると, $x \notin \text{FV}(M)$ だから,

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda x. Mx \rrbracket^\rho * d &= \mathbf{s} * \llbracket \lambda x. M \rrbracket^\rho * \llbracket \lambda x. x \rrbracket^\rho * d \\ &= \mathbf{s} * (\mathbf{k} * \llbracket M \rrbracket^\rho) * (\mathbf{s} * \mathbf{k} * \mathbf{k}) * d \\ &= \mathbf{k} * \llbracket M \rrbracket^\rho * d * (\mathbf{s} * \mathbf{k} * \mathbf{k} * d) \\ &= \llbracket M \rrbracket^\rho * d \end{aligned}$$

と計算できる. d は任意であり, 定理 13 から D_∞ は外延的だから, 補題の等式を得る.

| 定理 23. 構文的適用構造 $(D_\infty, *, \llbracket \cdot \rrbracket)$ は $\lambda\beta\eta$ -構文的モデルである.

任意にラムダ項 M, N をとる. $\lambda\beta\eta \vdash M = N$ の導出木に関する帰納法により $D_\infty \vDash M = N$ を示す.

$\lambda\beta\eta \vdash M = N$ が β -同値性もしくは η -同値性の帰結である場合は, それぞれ補題 21, 22 から従う. また, α -同値性の帰結である場合は, 解釈写像の定義から従う.

$\lambda\beta\eta \vdash P = Q$ から $\lambda\beta\eta \vdash \lambda x. P = \lambda x. Q$ が帰結されている場合. 任意の評価写像 ρ をとる. 帰納法の仮定から $D_\infty \vDash P = Q$ だから, 任意の $d \in D$ に対し,

$$\llbracket \lambda x. P \rrbracket^\rho * d = \llbracket P \rrbracket^{\rho[x:=d]} = \llbracket Q \rrbracket^{\rho[x:=d]} = \llbracket \lambda x. Q \rrbracket^\rho * d$$

が成り立つ. d, ρ は任意だから, D_∞ の外延性を用いて $D_\infty \vDash \lambda x. P = \lambda x. Q$ を得る.

それ以外の場合は明らかである.

3.6. 連続写像全体との同型性

定理 24. 完備半順序集合として, 同型

$$D_\infty \cong [D_\infty \rightarrow D_\infty]$$

が成り立つ.

実際,

$$\begin{aligned} F &= \underline{\lambda}d \in D_\infty. \underline{\lambda}a \in D_\infty. d * a \\ G &= \underline{\lambda}e \in [D_\infty \rightarrow D_\infty]. \bigsqcup_{n \geq 0} \Phi_\infty^n(\underline{\lambda}b \in D_n. \Phi_n^\infty(e(\Phi_\infty^n(b)))) \end{aligned}$$

とおくと, これらは連続で,

$$G \circ F = \text{id}_{D_\infty}; \quad F \circ G = \text{id}_{[D_\infty \rightarrow D_\infty]}$$

が成り立つ. 証明は省略する.

A. 補足

A.1. Scott 位相

完備半順序集合の間の写像の連続性の定義 12 は、適当な位相による位相としての連続性として定義することもできる。

定義 27. 完備半順序集合 D に対し、部分集合 $U \subseteq D$ が 2 条件

- 任意の $a, b \in D$ に対し、 $a \in U$ かつ $a \sqsubseteq b$ ならば $b \in U$ が成り立つ
- 任意の有向集合 $X \subseteq D$ に対し、 $\sqcup X \in U$ ならば $X \cap U \neq \emptyset$ が成り立つ

を満たすとき、 U は開集合であるとする。これによって D に定まる位相を Scott 位相 (— topology) という。

命題 25. 完備半順序集合 D, D' および写像 $f: D \rightarrow D'$ をとる。このとき、2 条件

- 定義 12 の意味で f は連続である
- D, D' に Scott 位相を入れたとき、位相の意味で f は連続である

は同値である。

定義 12 の意味で f が連続であるとする。任意に開集合 $U' \subseteq D'$ をとり、 $U = f^{-1}(U')$ とおく。 U が開集合であることを示せば良いので、開集合の 2 つの条件を順に確かめる。

$a \in U$ かつ $a \sqsubseteq b$ とすると、まず $f(a) \in U'$ である。さらに、命題 1 によって f は単調でもあるから、 $f(a) \sqsubseteq f(b)$ が成り立つ。したがって、 U' が開集合であることから $f(b) \in U'$ であり、 $b \in U$ が分かる。

有向集合 $X \subseteq D$ をとり、 $\sqcup X \in U$ とする。このとき、 f の連続性から $\sqcup f(X) = f(\sqcup X) \in U'$ が成り立つ。また、命題 1 により f は単調で、命題 2 により $f(X)$ は有向集合である。したがって、 U' が開集合であることから $f(X) \cap U' \neq \emptyset$ が成り立つ。これより、 $X \cap U \neq \emptyset$ が分かる。以上により U は開集合であり、 f は位相の意味で連続である。

逆に、位相の意味で f が連続であるとする。まず f が単調であることを示す。 $a \sqsubseteq b$ であるとし、 $f(a) \not\sqsubseteq f(b)$ であると仮定する。ここで、

$$U_{f(b)} = \{c' \in D' \mid c' \not\sqsubseteq f(b)\}$$

とおくと、これは開集合である。したがって、 f の連続性から $f^{-1}(U_{f(b)})$ も開集合で、 $a \in f^{-1}(U_{f(b)})$ である。 $a \sqsubseteq b$ であったから、開集合の定義より $b \in f^{-1}(U_{f(b)})$ でもあるが、これは $f(b) \not\sqsubseteq f(b)$ となって矛盾である。以上により、 f は単調である。

したがって、任意に有向集合 $X \subseteq D$ をとると、任意の $a \in X$ に対して $f(a) \sqsubseteq \sqcup f(X)$ が成り立つ。この両辺の上限をとれば $\sqcup f(X) \sqsubseteq f(\sqcup X)$ を得る。なお、 $\sqcup f(X)$ の存在は命題 2 によって保証され

ている。

$f(\sqcup X) \not\subseteq \sqcup f(X)$ と仮定すると $\sqcup X \in f^{-1}(U_{\sqcup f(X)})$ が成り立つ。 f の連続性から $f^{-1}(U_{\sqcup f(X)})$ は開集合なので、開集合の定義から $X \cap f^{-1}(U_{\sqcup f(X)}) \neq \emptyset$ を得る。 $a \in X \cap f^{-1}(U_{\sqcup f(X)})$ をとると、 $a \in X$ かつ $f(a) \in \sqcup f(X)$ であるが、これは上限の定義から矛盾である。 以上により、 $f(\sqcup X) \subseteq \sqcup f(X)$ も成り立つ。 上の議論と合わせて、 f は定義 12 の意味で連続である。

A.2. 解釈写像の別の定義

D_∞ 上の解釈写像は、定理 24 の同型写像を用いて以下のようにも定義できる。

定義 28. ラムダ項 M および評価写像 ρ に対して、 $\llbracket M \rrbracket^\rho \in D_\infty$ を以下によって再帰的に定義する。

$$\begin{aligned} \llbracket x \rrbracket^\rho &= \rho(x) \\ \llbracket PQ \rrbracket^\rho &= \llbracket P \rrbracket^\rho * \llbracket Q \rrbracket^\rho \\ \llbracket \lambda x. P \rrbracket^\rho &= G(\lambda d \in D_\infty. \llbracket P \rrbracket^{\rho[x:=d]}) \end{aligned}$$

なお、 G は定理 24 の証明中に定義した写像である。

定理 13 によって D_∞ は外延的だから、上記の $\llbracket \cdot \rrbracket$ は定義 26 の $\llbracket \cdot \rrbracket$ と同じ写像を定義する。

参考文献

- [1] J. R. Hindley, J. P. Seldin (2008) 『Lambda-Calculus and Combinators: an Introduction』 Cambridge University Press
- [2] H. P. Barendregt (1984) 『The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics』 North Holland

索引

外延的	2
外延的同値	2
解釈写像	3
完備	4
逆極限	6
構文的適用構造	3
射影	6
Scott 位相	20
単調	4
適用構造	2
適用写像	2
同型	6
評価写像	2
標準射影	7
変項の結合	12
有向集合	4
連続	4