等差数列の小数部分の分布

Ziphil Aleshlas

2013 年 1 月 17 日

1. 初めに

集合の記号と混同するのを防ぐため，小数部分の記号は波括弧ではなく山括弧で表記することにする．

定義 1. 実数 a に対し，a を超えない最大の整数を m とおいて，

$$a = m + d \quad (d \in \mathbb{R})$$

と表すとき，d を a の**小数部分**と呼び $\langle a \rangle$ で表す．また，m を a の**整数部分**と呼び $\lfloor a \rfloor$ で表す．

また，ここで言及する小数部分分布の定義は以下である．

定義 2. 正の実数 a に対し，無限数列 $\langle a \rangle, \langle 2a \rangle, \langle 3a \rangle, \cdots$ 全体の集合

$$F_a = \{\langle na \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

を a の**小数部分分布**と呼ぶ．

2. 有理数の小数部分分布

2.1. 集合の元

まず，次の補題を示す．

補題 1. r, s を互いに素な自然数とする．$0 \leq q < s$ なる任意の整数 q に対し，nr を s でわった余りが q となるような，$0 \leq n < s$ なる整数 n が存在する．

s 個の数からなる集合

$$R = \{0,\ r,\ 2r,\ \cdots,\ (s-1)r\}$$

を考え，R から任意の異なる元 $n_1 r, n_2 r$ $(n_1 > n_2)$ をとる．ここで，$n_1 r$ と $n_2 r$ を s でわったときの余

りが等しいと仮定する．このとき，$(n_1 - n_2)r$ は s でわり切れるので，r と s が互いに素であることから $n_1 - n_2$ は s の倍数である．n_1, n_2 はともに 0 以上 $s-1$ 以下の整数であるから，$n_1 - n_2$ も 0 以上 $s-1$ 以下の整数である．よって，$n_1 - n_2 = 0$ であり，$n_1 = n_2$ が成り立つ．これは $n_1 r$ と $n_2 r$ が異なるという事実に矛盾するので，$n_1 r$ と $n_2 r$ を s でわったときの余りは異なる．n_1, n_2 は任意であったから，R の元を s でわった余りは全て異なる．一方，s でわった余りとして考えられる数は $0, 1, 2, \cdots,$ $s-1$ の s 個であるから，$0 \leq q \leq s-1$ を満たす整数 q に対し，R の元であって s でわると q 余るような数が 1 つ存在する．よって，nr を s でわると q 余るような $0 \leq n \leq s-1$ なる整数 n が必ず存在し，補題 1 は示された．

この補題 1 から，互いに素な自然数 r, s と $0 \leq q < s$ なる整数 q に対し，$nr = sk + q$ となるような，非負整数 k と $0 \leq n < s$ なる整数 n が存在する．このとき，$a = \dfrac{r}{s}$ とすれば，

$$na = \frac{nr}{s} = k + \frac{q}{s}$$

が成り立ち，$0 \leq q < s$ より $0 \leq \dfrac{q}{s} < 1$ であるから，$\langle na \rangle = \dfrac{q}{s}$ である．一方，$\langle na \rangle$ は $\dfrac{q}{s}$ の形以外とり得ないので，正の有理数 a に対し，以下が成り立つ．

> **定理 2.** a を正の有理数とし，互いに素な自然数 r, s を用いて $a = \dfrac{r}{s}$ と表す．このとき，a の小数部分分布 F_a は，
>
> $$F_a = \left\{0,\ \frac{1}{s},\ \frac{2}{s},\ \cdots,\ \frac{s-1}{s}\right\}$$
>
> であり，その元の個数は $|F_a| = s$ である．

また，この定理 2 から，r, s が互いに素な自然数のとき，$F_{\frac{r}{s}}$ は r によらず決定されるので，ただちに以下が得られる．

> **定理 3.** r, s を互いに素な自然数とする．このとき，$F_{\frac{r}{s}} = F_{\frac{1}{s}}$ が成り立つ．

さて，2 つの自然数 s, s' を考え，s が s' の倍数だとする．このとき，$s = ks'$ なる自然数 k が存在し，定理 2 から

$$F_{\frac{1}{s}} = \left\{0,\ \frac{1}{ks'},\ \frac{2}{ks'},\ \cdots,\ \frac{ks'-1}{ks'}\right\}$$
$$F_{\frac{1}{s'}} = \left\{0,\ \frac{k}{ks'},\ \frac{2k}{ks'},\ \cdots,\ \frac{(s'-1)k}{ks'}\right\}$$

が成り立つ．したがって，$F_{\frac{1}{s}} \supseteq F_{\frac{1}{s'}}$ が成り立つ．

逆に，$F_{\frac{1}{s}} \supseteq F_{\frac{1}{s'}}$ が成り立っているとする．このとき，定理 2 から

$$F_{\frac{1}{s}} = \left\{0,\ \frac{1}{s},\ \frac{2}{s},\ \cdots,\ \frac{s-1}{s}\right\}$$
$$F_{\frac{1}{s'}} = \left\{0,\ \frac{1}{s'},\ \frac{2}{s'},\ \cdots,\ \frac{s'-1}{s'}\right\}$$

である．仮定から $0 \leq r' < s'$ なる任意の整数 r' に対し，$\dfrac{r'}{s'} = \dfrac{r}{s}$ すなわち $sr' = s'r$ を満たす $0 \leq r < s$ なる整数 r が存在する．r' は任意であるから，r は r' の倍数でなければならない．よって，自然数 k を用いて $r = kr'$ とおくと，$s = ks'$ が成り立ち，s は s' の倍数である．これより以下を得る．

> **定理 4.** s, s' を自然数とする．このとき，$F_{\frac{1}{s}} \supseteq F_{\frac{1}{s'}}$ が成り立つ必要十分条件は，s が s' の倍数であることである．

また，2 つの自然数 s, s' の最大公約数を g とおく．このとき，$F_{\frac{1}{s}}, F_{\frac{1}{s'}}$ の両方に共通して属する元を考える．そのような元をそれぞれ $\dfrac{r}{s}, \dfrac{r'}{s'}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} &= \frac{r'}{s'} \\ sr' &= s'r \end{aligned}$$

が成り立つ．$s = gS$, $s' = gS'$ とおくと，

$$\begin{aligned} gSr' &= gS'r \\ Sr' &= S'r \end{aligned}$$

であり，S と S' は互いに素であるから，整数 k を用いて $r = kS$ と表すことができる．このとき，共通する元は $\dfrac{kS}{s}$ すなわち $\dfrac{k}{g}$ であり，この形以外には存在しない．また，$0 \leq r < s$ から $0 \leq kS < gS$ すなわち $0 \leq k < g$ を得るから，

$$F_{\frac{1}{s}} \cap F_{\frac{1}{s'}} = \left\{0,\ \frac{1}{g},\ \frac{2}{g},\ \cdots,\ \frac{g-1}{g}\right\}$$

が成り立つ．これより以下を得る．

> **定理 5.** s, s' を自然数とし，その最大公約数を g とおく．このとき，$F_{\frac{1}{s}} \cap F_{\frac{1}{s'}} = F_{\frac{1}{g}}$ が成り立つ．

2.2. Abel 群の形成

以下の議論で用いる小数部分の性質をまず示しておく．

n 個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について考えると，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \langle x_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} x_k \\ =&\ \sum_{k=1}^{n} \langle x_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} (\lfloor x_k \rfloor + \langle x_k \rangle) \\ =&\ -\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \\ \in&\ \mathbb{Z} \end{aligned}$$

が成り立つ．任意の 2 数の差が整数であるとき，その小数部分は一致するから，これより以下を得る．

定理 6.　n 個の任意の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について，

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x_k \rangle \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle$$

が成り立つ．

ここで，小数部分に関して演算 $\dotplus$ を以下のように定義する．

定義 3.　正の実数 x_1, x_2 に対し，演算 $\dotplus$ を

$$x_1 \dotplus x_2 = \langle x_1 + x_2 \rangle$$

によって定義する．

この演算について定理 6 を繰り返し用いると，

$$\begin{aligned}(x_1 \dotplus x_2) \dotplus x_3 &= \langle \langle x_1 + x_2 \rangle + x_3 \rangle \\ &= \langle \langle \langle x_1 + x_2 \rangle \rangle + \langle x_3 \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x_1 + x_2 \rangle + \langle x_3 \rangle \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3 \rangle\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．同様にして，

$$x_1 \dotplus (x_2 \dotplus x_3) = \langle x_1 + x_2 + x_3 \rangle$$

も成り立つため，演算 $\dotplus$ は結合法則を満たす．また，交換法則も満たすことは明白である．

r, s を互いに素な自然数としたとき，演算 $\dotplus$ を小数部分分布 $F_{\frac{r}{s}}$ 上で考える．ここで，q を $0 \leq q < s$ を満たす任意の整数としたとき，e $(0 \leq e < s, e \in \mathbb{Z})$ の方程式

$$\frac{q}{s} \dotplus \frac{e}{s} = \frac{q}{s}$$

を考える．この式と

$$\left\langle \frac{q}{s} + \frac{e}{s} \right\rangle = \frac{q}{s}$$

は定義から同値である．また $0 \leq \dfrac{q}{s} < 1$, $0 \leq \dfrac{e}{s} < 1$ から $0 \leq \dfrac{q+e}{s} < 2$ である．よって，

$$\frac{q+e}{s} = \frac{q}{s},\ \frac{q}{s} + 1$$

であり，これより $e = 0, s$ を得る．ここで $0 \leq e < s$ であったから，$e = 0$ が考えていた方程式の解となる．したがって，演算 $\dotplus$ に関して $F_{\frac{r}{s}}$ 上における単位元は 0 であり，それは一意である．

同様にして，q' $(0 \leq q' < s, q' \in \mathbb{Z})$ の方程式

$$\frac{q}{s} \dotplus \frac{q'}{s} = 0$$

を考えると，これは

$$\left\langle \frac{q}{s} + \frac{q'}{s} \right\rangle = 0$$

と同値であり，$0 \leq \dfrac{q+q'}{s} < 2$ であるから，

$$\frac{q+q'}{s} = 0,\ 1$$

が成り立つ．これより $q' = -q,\ s-q$ を得るが，$0 \leq q' < s$ であるから $q' = s-q$ である．したがって，演算 $\dot{+}$ に関して $F_{\frac{r}{s}}$ の元 $\dfrac{q}{s}$ の逆元は $\dfrac{s-q}{s}$ であり，それは一意である．

以上から，集合と演算の組 $(F_{\frac{r}{s}}, \dot{+})$ は，結合法則と交換法則を満たし，単位元と逆元が一意に存在する．すなわち，以下を得る．

> 定理 7．r, s を互いに素な自然数としたとき，小数部分分布 $F_{\frac{r}{s}}$ と演算 $\dot{+}$ は，位数 s の Abel 群を形成する．

ここで，写像

$$f\colon F_{\frac{r}{s}} \to \mathbb{Z}/s\mathbb{Z};\ \frac{q}{s} \mapsto q$$

を考えると，f は全単射であり，$F_{\frac{r}{s}}$ の任意の元 a, b に対し $f(a \dot{+} b) \equiv f(a) + f(b) \pmod{s}$ が成り立つので，以下を得る．

> 定理 8．r, s を互いに素な自然数とする．このとき，剰余類環を群として考えた $(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}, +)$ と群 $(F_{\frac{r}{s}}, \dot{+})$ は同型である．

3. 無理数の小数部分分布

3.1. 濃度

a を正の無理数とし，任意の異なる自然数 n_1, n_2 をとる．このとき，ある整数 k が存在して，$n_1a - n_2a = k$ ならば，$n_1 \neq n_2$ より

$$a = \frac{k}{n_1 - n_2}$$

が成り立つ．左辺は無理数で右辺は有理数であるので，これは矛盾である．したがって，$n_1a - n_2a$ が整数となるような異なる自然数 n_1, n_2 は存在しない．これより，$\langle n_1a \rangle, \langle n_2a \rangle$ は，任意の自然数 n_1, n_2 に対して異なる値であるから，無限数列 $\langle a \rangle, \langle 2a \rangle, \langle 3a \rangle, \cdots$ の中に値が一致する 2 数は存在しない．これより，小数部分分布 F_a は無限集合となる．

また，自然数 n の値が異なれば $\langle na \rangle$ も異なり，その逆も成り立つから，写像

$$f\colon \mathbb{N} \to F_a;\ n \mapsto \langle na \rangle$$

は全単射となる．したがって $\mathbb{N}$ と F_a の濃度は等しく，よって以下を得る．

定理 9. 正の無理数 a に対し，a の小数部分分布 F_a は無限集合であり，その濃度は $|F_a| = \aleph_0$ である．

3.2. 代数的数と超越数

以下の 2 つの補題を示す．

補題 10. a を無理数の代数的数，n を自然数としたとき，$\langle na \rangle$ は代数的数である．

a は代数的数であるから，a を根とする代数方程式を

$$T(a) = t_r a^r + t_{r-1} a^{r-1} + \cdots + t_1 a^1 + t_0 \quad (t_r \neq 0)$$

とすると，$T(a) = 0$ を満たす非負整数 r と有理数 $t_r, t_{r-1}, \cdots, t_0$ が存在する．ここで，n, m を任意の整数とすると，

$$U(a) = u_r(na+m)^r + u_{r-1}(na+m)^{r-1} + \cdots + u_1(na+m) + u_0 \quad (u_r \neq 0)$$

は a の r 次式であるから，任意の a に対し $T(a) = U(a)$ となるような有理数 $u_r, u_{r-1}, \cdots, u_0$ が存在する．なぜなら，$T(a), U(a)$ の係数を比較すると，

$$\begin{aligned}
t_r &= u_r \cdot {}_r\mathrm{C}_r n^r m^0 \\
t_{r-1} &= u_r \cdot {}_r\mathrm{C}_{r-1} n^{r-1} m^1 + u_{r-1} \cdot {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-1} n^{r-1} m^0 \\
&\vdots \\
t_0 &= u_r \cdot {}_r\mathrm{C}_0 n^0 m^r + u_{r-1} \cdot {}_{r-1}\mathrm{C}_0 n^0 m^{r-1} + \cdots + u_0 \cdot {}_0\mathrm{C}_0 n^0 m^0
\end{aligned}$$

が成り立ち，一般には $0 \leq k \leq r$ なる整数 k に対し，

$$t_k = \sum_{j=0}^{r-k} u_{r-j} \cdot {}_{r-j}\mathrm{C}_k n^k m^{r-k-j}$$

が成り立つ．ここで，t_k および ${}_{r-j}\mathrm{C}_k, n^k, m^{r-k-j}$ は全て有理数であるから，u_{r-j} も順に有理数であることが分かる．以上から，$U(a) = 0$ となるような有理数 $u_r, u_{r-1}, \cdots, u_0$ が存在するため，$na + m$ は代数的数である．ここで，$m = -\lfloor na \rfloor$ とおけば $na + m = \langle na \rangle$ であるから，$\langle na \rangle$ も代数的数である．これより，補題 10 は示された．

補題 11. a を無理数の超越数，n を自然数としたとき，$\langle na \rangle$ は超越数である．

n, m を整数とし，$na + m$ が代数的数であると仮定する．ここで，

$$\begin{aligned}
T(a) &= t_r a^r + t_{r-1} a^{r-1} + \cdots + t_1 a^1 + t_0 \quad (t_r \neq 0) \\
U(a) &= u_r(na+m)^r + u_{r-1}(na+m)^{r-1} + \cdots + u_1(na+m) + u_0 \quad (u_r \neq 0)
\end{aligned}$$

と定義するとき，$na+m$ は代数的数であるから，$U(a)=0$ なる非負整数 r と有理数 $u_r, u_{r-1}, \cdots, u_0$ が存在する．$U(a)$ を展開して整理すれば，$U(a)=T(a)$ なる有理数 $t_r, t_{r-1}, \cdots, t_0$ が存在することは明らかである．実際，$0 \leq k \leq r$ なる整数 k に対し，

$$t_k = \sum_{j=0}^{r-k} u_{r-j} \cdot {}_{r-j}\mathrm{C}_k n^k m^{r-k-j}$$

が成り立ち，u_{r-j}, ${}_{r-j}\mathrm{C}_k$, n^k, m^{r-k-j} は全て有理数であるから，t_k も有理数となる．以上から，$na+m$ が代数的数であるとき a は代数的数である．ゆえに，これの対偶から，a が超越数のとき $na+m$ は超越数である．ここで，$m=-\lfloor na \rfloor$ とおけば $na+m=\langle na \rangle$ であるから，$\langle na \rangle$ も超越数である．これより，補題 11 は示された．

この補題 10 および補題 11 からただちに以下を得る．

定理 12. $a \in \mathbb{A}$ ならば $F_a \cap \mathbb{T} = \emptyset$ が成り立ち，$a \in \mathbb{T}$ ならば $F_a \cap \mathbb{A} = \emptyset$ が成り立つ [*1]．

3.3. 稠密性

まずは，以後の議論で用いる小数部分に関する以下の性質を証明しておく．

定理 13. x を実数とする．このとき，$\langle x \rangle \neq 0$ ならば

$$\langle -x \rangle = 1 - \langle x \rangle$$

が成り立つ．

x を実数とすると，

$$x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$$

が成り立つので，これより

$$\begin{aligned} -x &= -\lfloor x \rfloor - \langle x \rangle \\ &= (-\lfloor x \rfloor - 1) + (1 - \langle x \rangle) \end{aligned}$$

を得る．ここで，$\langle x \rangle \neq 0$ より $0 < \langle x \rangle < 1$ であるから，$0 < 1 - \langle x \rangle < 1$ が成り立ち，また $-\lfloor x \rfloor - 1$ は整数である．したがって，$\langle -x \rangle = 1 - \langle x \rangle$ を得るので，定理 13 は成り立つ．

さて，s を任意の自然数とし，a を $0 < a < \dfrac{1}{s}$ なる無理数とする．ここで，$1 \leq r < s$ なる整数 r を考え，$\dfrac{r}{s} \leq na < \dfrac{r+1}{s}$ を成り立たせる自然数 n が存在しないと仮定する．このとき，n' を $n'a \geq \dfrac{r+1}{s}$ を成り立たせる最小の自然数とすると，この n' が 2 以上であることは明らかである．n' の最小性から $(n'-1)a < \dfrac{r+1}{s}$ であり，さらに仮定から $(n'-1)a < \dfrac{r}{s}$ が成り立つ．これより，

$$n'a - (n'-1)a > \frac{1}{s}$$

[*1] $\mathbb{A}$ は無理数の代数的数全体の集合，$\mathbb{T}$ は無理数の超越数全体の集合を表す．

$$a > \frac{1}{s}$$

を得るが，これは $0 < a < \dfrac{1}{s}$ に矛盾する．したがって，これに $0 < a < \dfrac{1}{s}$ であることを加えれば，$0 \leq r < s$ なる任意の整数 r に対し，$\dfrac{r}{s} \leq na < \dfrac{r+1}{s}$ を満たす自然数 n が存在する．また，この na は $0 \leq na < 1$ を満たすから，$na = \langle na \rangle$ であり，これにより以下を得る．

> **補題 14.** s を任意の自然数とし，a を $0 < a < \dfrac{1}{s}$ なる無理数とする．このとき，$0 \leq r < s$ なる任意の整数 r に対し，$\dfrac{r}{s} \leq \langle na \rangle < \dfrac{r+1}{s}$ を満たす自然数 n が存在する．

この補題の a の範囲をさらに拡張する．

a を任意の正の無理数とする．定理 9 から小数部分分布 F_a の元は無限個あるので，鳩の巣原理より，区間 $[0, 1)$ を s 個に区切った区間

$$\left[0, \frac{1}{s}\right), \left[\frac{1}{s}, \frac{2}{s}\right), \cdots, \left[\frac{s-1}{s}, 1\right)$$

のうち，少なくとも 1 つの小区間には F_a の元が少なくとも 2 つ属している．この元を $\langle n_1 a \rangle$, $\langle n_2 a \rangle$ $(n_1 < n_2)$ とする．ここで，$\langle n_1 a \rangle < \langle n_2 a \rangle$ ならば，$0 < \langle n_2 a \rangle - \langle n_1 a \rangle < \dfrac{1}{s} < 1$ であることに注意して，定理 6 と定理 13 より，

$$\begin{aligned}
\langle n_2 a \rangle - \langle n_1 a \rangle &= \langle \langle n_2 a \rangle - \langle n_1 a \rangle \rangle \\
&= \langle \langle n_2 a \rangle + 1 - \langle n_1 a \rangle \rangle \\
&= \langle \langle n_2 a \rangle + \langle -n_1 a \rangle \rangle \\
&= \langle n_2 a - n_1 a \rangle \\
&= \langle (n_2 - n_1) a \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，補題 14 から，$0 \leq r < s$ なる任意の整数 r に対し，

$$\frac{r}{s} \leq \langle n' \langle (n_2 - n_1) a \rangle \rangle < \frac{r+1}{s}$$

を満たす自然数 n' が存在する．このとき，定理 6 から，

$$\frac{r}{s} \leq \langle n' (n_2 - n_1) a \rangle < \frac{r+1}{s}$$

が成り立つ．

一方 $\langle n_1 a \rangle > \langle n_2 a \rangle$ ならば，定理 13 を用いて

$$\begin{aligned}
\langle n_1 a \rangle - \langle n_2 a \rangle &= \langle (n_1 - n_2) a \rangle \\
&= 1 - \langle (n_2 - n_1) a \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，補題 14 から，$0 \leq r' < s$ なる任意の整数 r' に対し，

$$\frac{r'}{s} \leq \langle n' - n' \langle (n_2 - n_1) a \rangle \rangle < \frac{r'+1}{s}$$

を満たす自然数 n' が存在する．このとき，

$$\begin{gathered}\frac{r'}{s} \leq 1 - \langle n'(n_2 - n_1)a \rangle < \frac{r'+1}{s} \\ \frac{s-r'-1}{s} < \langle n'(n_2 - n_1)a \rangle \leq \frac{s-r'}{s}\end{gathered}$$

が成り立ち，$r = s - r' - 1$ とおくと $0 \leq r < s$ であり，

$$\frac{r}{s} < \langle n'(n_2 - n_1)a \rangle \leq \frac{r+1}{s}$$

となる．ここで，$\langle n'(n_1 - n_2)a \rangle$ は有理数となり得ないので，

$$\frac{r}{s} \leq \langle n'(n_2 - n_1)a \rangle < \frac{r+1}{s}$$

も成り立つ．

どちらの場合においても，$n = n'(n_2 - n_1)$ とおけば，$n > 0$ であるから，以下が成り立つ．

> **補題 15.** s を任意の自然数とし，a を任意の正の無理数とする．このとき，$0 \leq r < s$ なる任意の整数 r に対し，$\dfrac{r}{s} \leq \langle na \rangle < \dfrac{r+1}{s}$ を満たす自然数 n が存在する．

さて，任意の $0 \leq x < 1$ なる実数 x，任意の正の実数 ε，および任意の正の無理数 a をとる．$x \neq 0$ のとき，有理数の実数における稠密性から，

$$x - \varepsilon < \frac{r}{s} < x; \quad x < \frac{r+1}{s} < x + \varepsilon \quad (0 \leq r < s)$$

を満たす整数 r と自然数 s が存在する．この r, s に対し，補題 15 から

$$\frac{r}{s} \leq \langle na \rangle < \frac{r+1}{s}$$

を満たす自然数 n が存在する．このとき a は無理数であるから，$\langle na \rangle = \dfrac{r}{s}$ となることはない．したがって，

$$\frac{r}{s} < \langle na \rangle < \frac{r+1}{s}$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{gathered}x - \varepsilon < \langle na \rangle < x + \varepsilon \\ |\langle na \rangle - x| < \varepsilon\end{gathered}$$

であるから，x の任意の近傍に小数部分分布 F_a の元が属する．

$x = 0$ のときについては，

$$0 < \frac{r+1}{s} < 0 + \varepsilon \quad (0 \leq r < s)$$

を満たす整数 r と自然数 s が存在することから，同様にして

$$|\langle na \rangle - 0| < \varepsilon$$

を満たす自然数 n が存在し，0 の任意の近傍にも F_a の元が属する．これより以下を得る．

定理 16. 任意の正の無理数 a に対し，a の小数部分分布 F_a は，区間 $[0, 1)$ において稠密である．

A. 補足

正の無理数 a に対する小数部分分布 F_a が，区間 $[0, 1)$ において稠密であることはすでに示した．しかし，F_a について，より強く以下のことが成り立つことが知られている．

定義 4. 実数列 (x_n) を考える．また，$0 \le p < q \le 1$ なる区間 $[p, q)$ に対し，これに属するような $\langle x_n \rangle$ $(n \le N)$ の個数を T_N とする．ここで，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{T_N}{N} = q - p$$

が成り立つとき，数列 (x_n) は単位区間において**一様分布** (equidistributed) するという．

定理 17.［Weyl の一様分布定理 (—'s equidistribution theorem)**］** 任意の正の無理数 a に対し，数列 (na) は，単位区間において一様分布する．

少々厳密性を失うが，この定理 17 は，正の無理数 a の小数部分分布 F_a が，例えば区間 $[0.1, 0.2)$ には多く分布して $[0.2, 0.3)$ にはあまり分布しないなどということはなく，一様に偏ることなく区間 $[0, 1)$ に分布していることを述べている．

なお，これは以下の定理から導き出せる．

定理 18.［Weyl の基準 (—'s criterion)**］** 実数列 (x_n) が一様分布する必要十分条件は，任意の自然数 h に対し，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i h x_n} = 0$$

が成り立つことである．

a を正の無理数とすると，自然数 h に対して $e^{2\pi iha} \ne 1$ であるから，

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ihna} = \frac{1}{N} \frac{e^{2\pi ihNa} - 1}{e^{2\pi iha} - 1}$$

が成り立つ．したがって，

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ihna} \right| \le \frac{1}{N} \frac{2}{|e^{2\pi iha} - 1|} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

であるから，定理 18 より，定理 17 が示された．

なお，さらに一般に，無理数 a と実数 b に対し，数列 $\{na + b\}$ も単位区間において一様分布することが示される．